МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
І ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБОТ
З ДИСЦИПЛІНИ

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки 6.030504 - "Економіка підприємства" та 6.030509 - "Облік і аудит")

Харків – ХНУМГ – 2013

Методичні вказівки до самостійної роботи і виконання лабораторних робот з дисципліни «Комп'ютерне моделювання економічних систем та процесів» (для студентів 1 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки 6.030504 - "Економіка підприємства" та 6.030509 - "Облік і аудит") / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: О. М. Штельма, Н. В. Макогон. – Х.: ХНУМГ, 2013. – 48 с.

Укладачі: О. М. Штельма,
Н. В. Макогон.

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рецензент: доцент фізико-математичних наук О. Б. Костенко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 30.08.2013 р.

ЗМІСТ

Спеціалізовані програмні системи комп’ютерного моделювання Комп’ютерні системи для розв’язання оптимізаційних задач Початок роботи в Scilab. Перші кроки

Як запустити Scilab? З командного рядка наберіть scilab\bin\runscilab.exe В результаті отримаєте головне робоче вікно Scilab із запрошенням -->:

Як покинути сесію Scilab? Набрати exit і натиснути [Enter] або вибрати на панелі управління вікна File-Exit.

Як помістити частину тексту з вікна Scilab в текстовий редактор або який-небудь інший пакет? Виділіть потрібний текст мишею, потім [Edit][Copy to Clipboard]. Потім у Вашому пакеті виконайте в потрібному місці [Paste]. Примітка: Звична заміна вибору режиму копіювання як «ctrl+c» та режиму Paste як «ctrl+v» тут не спрацьовує.

Як подивитися демонстраційні приклади? Виберіть в рядку меню Demos і слідуйте подальшим вказівкам.

Як запустити програму на виконання? За допомогою меню File-Exec або командою exec.

Як отримати довідку (help)? Є три підміню в меню Help. 1. Режим Help-HelpDialog. Допустимо, ми хочемо дізнатися синтаксис операції "exec". Нижня частина таблиці дозволяє вибрати розділ, що цікавить нас. Це буде глава "Scilab Programming". Тепер виберіть з верхнього вікна операцію "exec"и натисніть кнопку Show. В результаті отримаємо довідкову інформацію по цій операції. 2. Режим Help-Topic дозволяє отримати довідку прямо по назві команди. 3. Режим Help-Apropos дозволяє отримати довідку по ключовому слову, що задається. Використовується, коли Ви забули назву потрібної команди. Ще одна можливість: у командному рядку після запрошення --> набрати help <ім'я команди>. Еквівалентно Help-Topic. Приклад. help exec.

Як розуміти формули синтаксису команд? Повний синтаксис команд можна отримати за допомогою команди help з параметрами. Параметри, вказані в квадратних дужках не є обов'язковими. Приклад. Хай ми хочемо дізнатися, як користуватися командою обчислення синуса sin. Виконаєте help sin. У формулі синтаксису [t]=sin(x) параметр x - обов'язковий, а параметр t може бути і не присутнім.

Як використовувати Scilab, як простого калькулятора? Ввести цифровий вираз і натиснути [Enter]. Результатом буде: ans=<відповідь>

<u>Приклад 1.</u>
2+3^2
ans = 11.

<u>Приклад 2.</u>
a=1;
b=7;
x=a+b
Буде отримана відповідь
x = 8.

Зауваження: Якщо в кінці рядка коштує знак "крапки з комою"(;), то ця операція виконується не відразу, а після набору всієї послідовності команд до тієї, після якої вже не коштує крапка з комою.

Як записати результат сесії Scilab у файл? Ми хочемо зберегти отримані у вікні Scilab запису у файлі. Для цього виконаємо команду save('my_file'). У простому випадку для цього можна використовувати меню File-Save. В результаті файл запишеться в поточний каталог. За умовчанням це каталог scilab\bin\. Розширення створюваного файлу за умовчанням *.bin. Отриманий файл надалі можна завантажити за допомогою команди load.

Як виконувати операції? Якщо ми хочемо, щоб кожна операція виконувалася безпосередньо відразу, слідує після запрошення -> набрати операцію і клавішу введення [Enter]. Можна набирати операції послідовно, розділяючи їх знаком ";", а потім виконати [Enter]. Тоді на екрані буде виведений тільки кінцевий результат. Можна писати після запрошення в одному командному рядку декілька операцій, розділяючи їх крапкою з комою. Тоді результати тих конструкцій, які закінчуються знаком ";" не виводитимуться на екран. Ми побачимо кінцевий результат виконання послідовності декількох командних рядків, остання з яких не закінчується крапкою з комою. Результати проміжних операцій на екран виводитися не будуть.

Приклад 3.

```
-->a=2
a = 2.
-->b=3
b = 3.
-->c=a+b
c = 5.
```

Приклад 4.

```
-->a=2;
-->b=3;
-->c=a+b;
-->d=c*10
d = 50.
```

Якщо ми хочемо дізнатися, чому дорівнювало значення змінної с, ця можливість нами не втрачена:

```
-->c
c = 5.
```

Зауваження по синтаксису: Якщо командний рядок дуже довгий, то її можна розбити на дві, додаючи в місці розбиття дві крапки (..).

В якості приклада розглянемо пошук локального мінімуму функції однієї змінної.

Приклад 5.

Знайти мінімум функції $f(x)=x^4+3x^3-13x^2-6x+26$.

Рішення задачі почнемо з побудови графіка функції x=-5:0.1:1;

```
y=x.^4+3*x.^3-13*x.^2-6*x+26;
plot(x,y);
xtitle('Графік функції f(x)=x^4+3*x^3-13*x^2-6*x+26','X','Y');
xgrid();
```

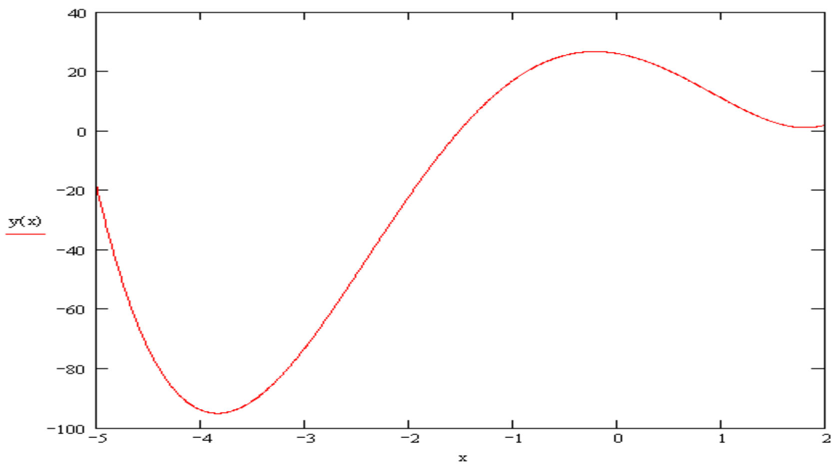


Рис. 1 - Графік функції $f(x)=x^4+3x^3-13x^2-6x+26$

З графіка видно, що функція має мінімум в районі точки x= –4. Для знаходження точнішого значення мінімуму функції в Scilab служить функція [f,xopt]=optim(costf,x0), яка призначена для пошуку мінімуму будь-якої функції, x0 - вектор-стовбець початкових наближень довжиною n, функція costf визначає функцію, мінімум якої шукається.

Функція повертає мінімум функції (f) і точку, в якій функція досягає цього значення (xopt).

Головною особливістю функції optim є структура функції costf, яка має бути наступною:

```
function [f,g,ind]=costf(x,ind)
//Функція costf повинна повертати функцію f, її градієнт g.
//f - функція від вектора невідомих x, мінімум якої шукається f=gg(x);
//g - градієнт функції f (вектор часткової похідної f по x)
g=numdiff(gg,x);
endfunction
```

Для функції однієї змінної в якості f повертається функція, мінімум якої шукається, в якості функції g – її похідна.

В лістингу представлено використання optim для пошуку мінімуму функції однієї змінної на прикладі $f(x) = x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 26$.

Лістинг:

```
//Функція fi, в якій формуватиметься функція f і її
//похідна g.
function [f,g,ind]=fi(x,ind)
//Функція f, мінімум якої шукається.
f=x^4+3*x^3-13*x^2-6*x+26
//Функція g - похідна від функції f.
g=4*x^3+9*x^2-26*x-6
endfunction
//Початкове наближення точки мінімуму.
y0= -2;
//Пошук точки мінімуму (xmin) і значення функції (fmin) в ній
[fmin,xmin]=optim(fi,y0);
```

Нижче представлений результат пошуку мінімуму функції однієї змінної:

```
-->fmin
fmin = - 95.089413
-->xmin
xmin = 3.8407084
```

Аналогічно можна знайти мінімум будь-якої іншої функції однієї змінної, головним завданням є проблема правильного вибору точки початкового наближення.

Лінійне програмування. Графічний метод
Розв'язання ЗЛП графічним методом

<u>*Приклад 6*</u>. (Задача оптимального планування і організації виробництва.) Меблева фабрика випускає книжкові полиці і шафи. Їх виробництво обмежене наявністю необхідних ресурсів (деревно-стружкових плит (ДСП), високоякісних дощок (ВД) і скла).

Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, запаси ресурсів і прибуток від реалізації одиниці продукції приведені в табл.1. Потрібно скласти виробничий план випуску продукції з урахуванням наявних ресурсів, який забезпечував би найбільший прибуток.

Таблиця 1 – Норми витрат ресурсів

Види ресурсів	**Види продукції**		**Запаси ресурсів**
	Полиці	**Шафи**	
ДСП	3	2	27
ВД	2	4	28
Скло	2	3	23
Прибуток	4	7	

Розв'язання

Приведені вище умови є економічною постановкою задачі. Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1, x_2 - кількість полиць та шаф відрповідно, які поануються до випуску. Тоді сумарний прибуток від реалізації планової продукції (цільова функція) складає $z = 4x_1 + 7x_2 \to \max$. При цьому загальні витрати ДСП дорівнюють $3x_1 + 2x_2$, і вони не повинні перевищувати запас, який є в наявності 27. Що призводить до обмеження $3x_1 + 2x_2 \le 27$. Аналогічно враховується рбмеження по ВД і склу: $2x_1 + 4x_2 \le 28$, $2x_1 + 3x_2 \le 23$. Так як об'єм виробів, що випускаються, не може бути негативним, то $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + 7x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Таким чином задача полягає в тому, щоб знайти ненегативні значення x_1, x_2, що задовольняють обмеженням Ω, для яких функція z набуває найбільшого значення.

Розв'яжемо задачу графічним методом.

1. Побудуємо область допустимих рішень цільової функції y.

Будуємо прямокутну систему координат. Оскільки x_1, x_2 позитивні, то обмежимося розглядом першого квадранта.

Пряма (1): $3x_1 + 2x_2 = 27$

x_1	0	9
x_2	13,5	0

Пряма (2): $2x_1 + 4x_2 = 28$

x_1	0	14
x_2	7	0

Пряма (3): $2x_1 + 3x_2 = 23$

x_1	1	11,5
x_2	7	0

Заштрихована на графіці область ABCD між прямими обмеженнь - область допустимих рішень функції y.

2. Побудуємо пряму рівня функції мети. (На графіці вказана пунктиром.)

$$y = 4x_1 + 7x_2 = 0$$

Вона проходить через точки (0; 0) и (-3,5; 2).

Будуємо градієнт функції z

$$\text{grad}\, y = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_1}; \frac{\partial y}{\partial x_2} \right\} = \{4; 7\}$$

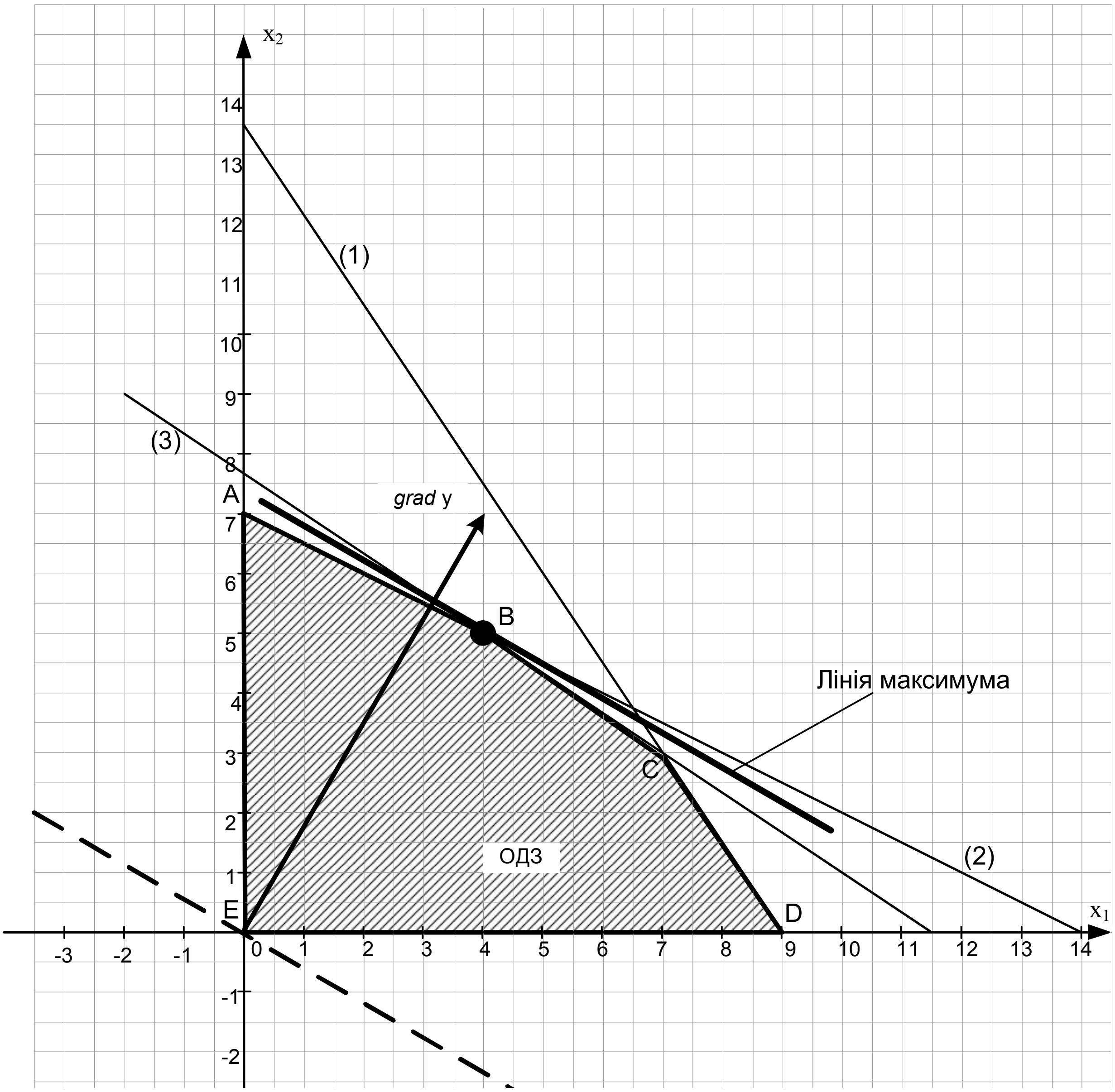


Рис.2 – Графічний метод рішення ЗЛП

3. Максимізація цільової функції y

Вектор-градієнт $\text{grad } y$ є вектором, що вказує напрям зростання функції. Переміщаючи пряму рівня паралельно самій собі у напрямі вектора $\text{grad } z$, знаходимо точку максимуму. Точка максимума знаходиться в точці B. Вона лежить на перетині прямих (2) і (3).

Отже, необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 = 23 \end{cases}$$

Отже,

$$\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Тоді,

$$y_{max} = 4x_1 + 7x_2 = 4 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 16 + 35 = 51$$

3. Записуємо відповідь: $\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, y^* = 51$.

Отримане рішення означає, що необхідно випускати 4 полиці і 5 шаф. При цьому прибуток буде максимальним і дорівнюватиме 51 грош.од.

Розв'язання ЗЛП графічним методом в Excel

Розглянемо рішення приклада 6.

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + 7x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Розв'яжемо задачу графічним методом.

1. Створимо в Excel допоміжну таблицю A9 : F9(див. нижче).

Зафіксуємо змінну(наприклад x_1 - стовпець A). З кожного рівняння обмеження виразимо змінну x_2 :

$$x_2 = \frac{27 - 3x_1}{2} \text{ з обмеження по ДСП;}$$

$$x_2 = \frac{28 - 2x_1}{4} \text{ з обмеження по ВД;}$$

$$x_2 = \frac{23 - 2x_1}{3} \text{ з обмеження по склу.}$$

2. З цільової функції також виразимо змінну x_2

$$x_2 = \frac{\text{const} - 4x_1}{7}.$$

3. Заповнимо відповідними формулами стовпці B, C, D

B2 | =ЕСЛИ(27-3*A2>=0;(27-3*A2)/2;#Н/Д)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	3x1+2x2<=27	2x1+4x2<=28	2x1+3x2<=23	Z	max	
2	0	13,5	7	7,666666667	8,571429	60	
3	2	10,5	6	6,333333333	7,428571		
4	4	7,5	5	5	6,285714		
5	6	4,5	4	3,666666667	5,142857		
6	8	1,5	3	2,333333333	4		
7	10	#Н/Д	2	1	2,857143		
8	12	#Н/Д	1	#Н/Д	1,714286		
9	14	#Н/Д	0	#Н/Д	0,571429		
10	16	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	-0,57143		
11							
12							

Диаграмма1 | Sheet1 | Sheet2 | Sheet3

(значення #Н/Д записуємо для того, щоб не виводити на графіку негативні значення змінних)

4. У осередок F2 введемо константу, наприклад 60 (змінюючи значення в осередку F2, ми зможемо переміщати цільову функцію).

5. Заповнимо стовпець E

E2 | =(F2-4*A2)/7

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	3x1+2x2<=27	2x1+4x2<=28	2x1+3x2<=23	Z	max	
2	0	13,5	7	7,666666667	8,571429	60	
3	2	10,5	6	6,333333333	7,428571		
4	4	7,5	5	5	6,285714		
5	6	4,5	4	3,666666667	5,142857		
6	8	1,5	3	2,333333333	4		
7	10	#Н/Д	2	1	2,857143		
8	12	#Н/Д	1	#Н/Д	1,714286		
9	14	#Н/Д	0	#Н/Д	0,571429		
10	16	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	-0,57143		
11							
12							

Диаграмма1 | Sheet1 | Sheet2 | Sheet3

6. На окремому листі будуємо діаграму, на якій визначаємо область Ω і обводимо її полілінією.

7. Спостерігаючи за зміною цільової функції, знаходимо точку максимуму (мінімуму) і позначаємо її крапкою.

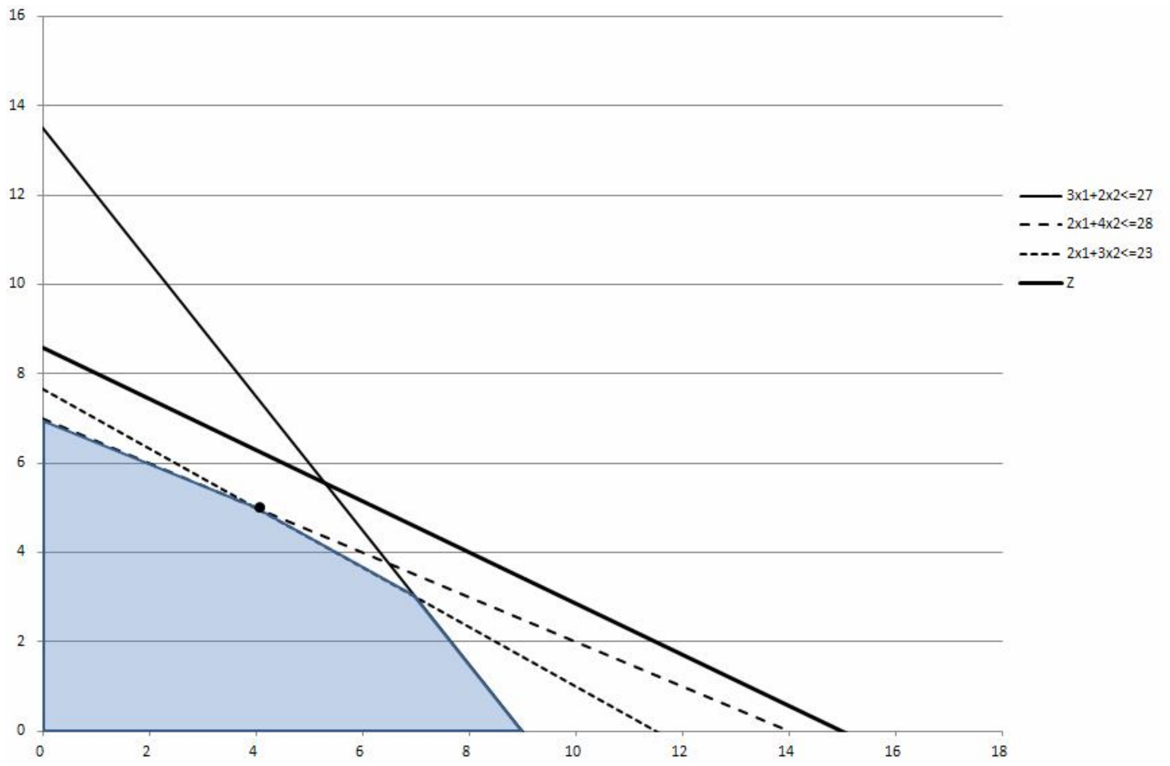


Рис.2 – Графічний метод (значення цільвої функції 60)

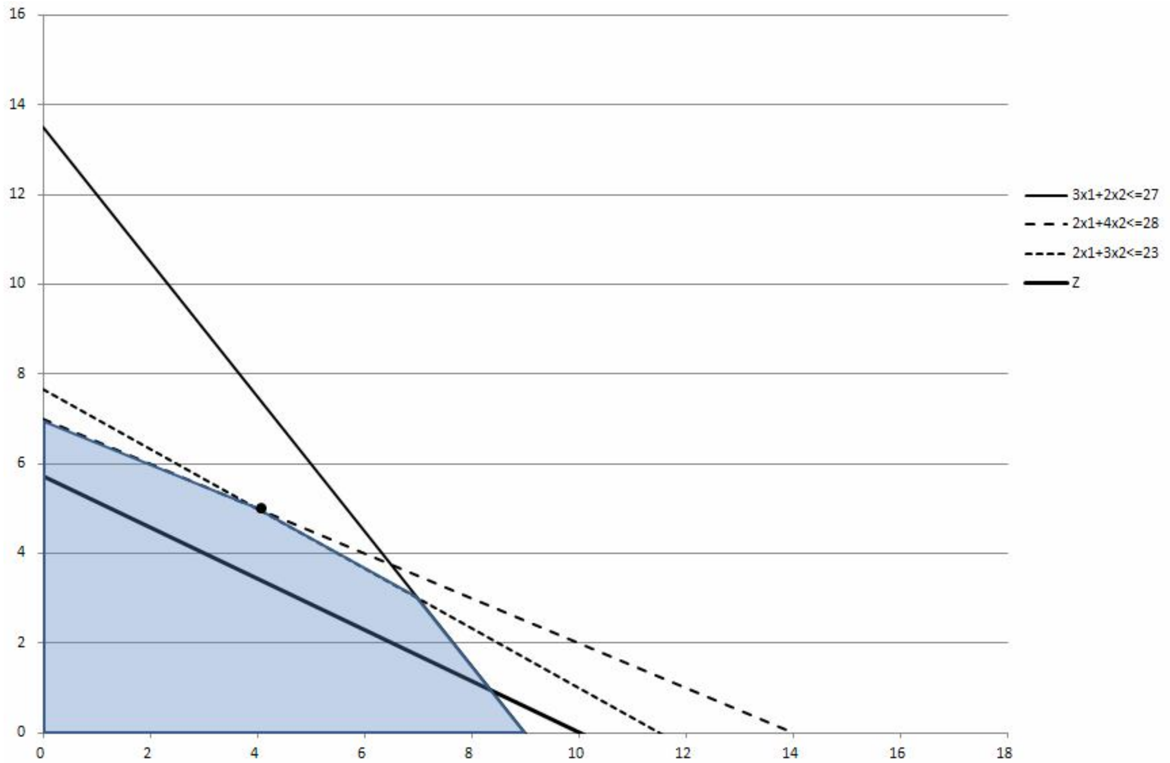
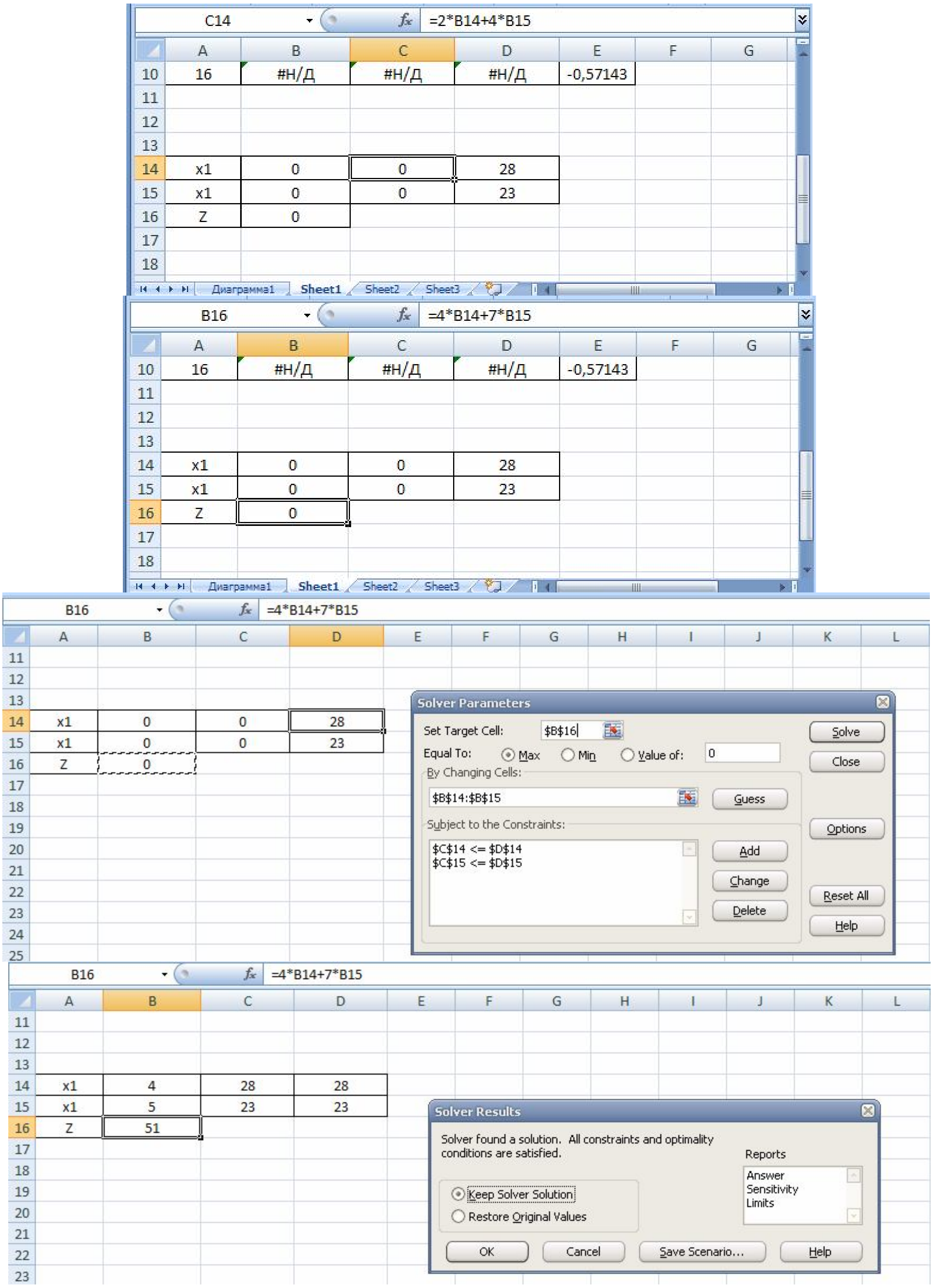


Рис.3 – Графічний метод (значення цільвої функції 40)

8. Визначаємо прямі, перетин яких дає оптимальне рішення (обмеження по ВД і обмеження по склу).

9. За допомогою *пошуку рішення* вирішуємо систему з двох лінійних рівнянь (обмеження по ВД і обмеження по склу);



10. Записуємо відповідь: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $y^* = 51$.

Розв'язання ЗЛП графічним методом в Scilab

Розглянемо рішення приклада 6.

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + 7x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Розв'яжемо задачу графічним методом.

$$x_2 = \frac{27 - 3x_1}{2} \text{ з обмеження по ДСП;}$$

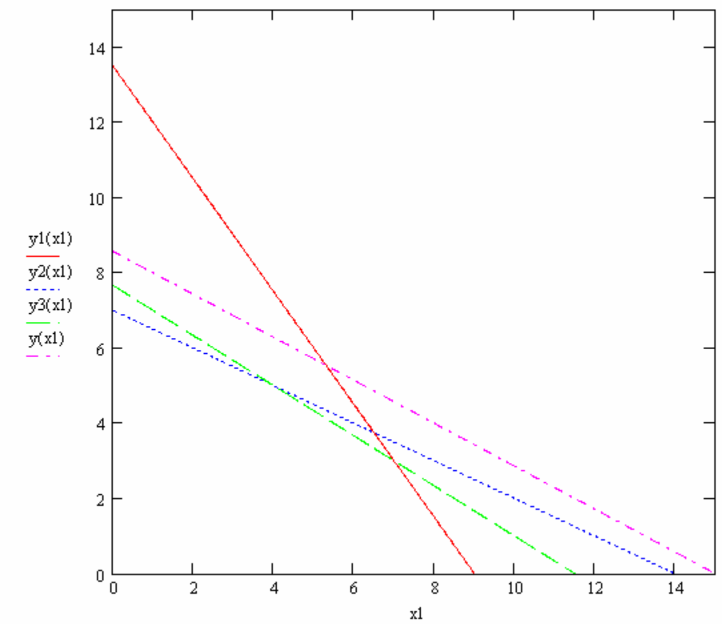
$$x_2 = \frac{28 - 2x_1}{4} \text{ з обмеження по ВД;}$$

$$x_2 = \frac{23 - 2x_1}{3} \text{ з обмеження по склу.}$$

$$x_2 = \frac{const - 4x_1}{7} \text{ з цільової функції.}$$

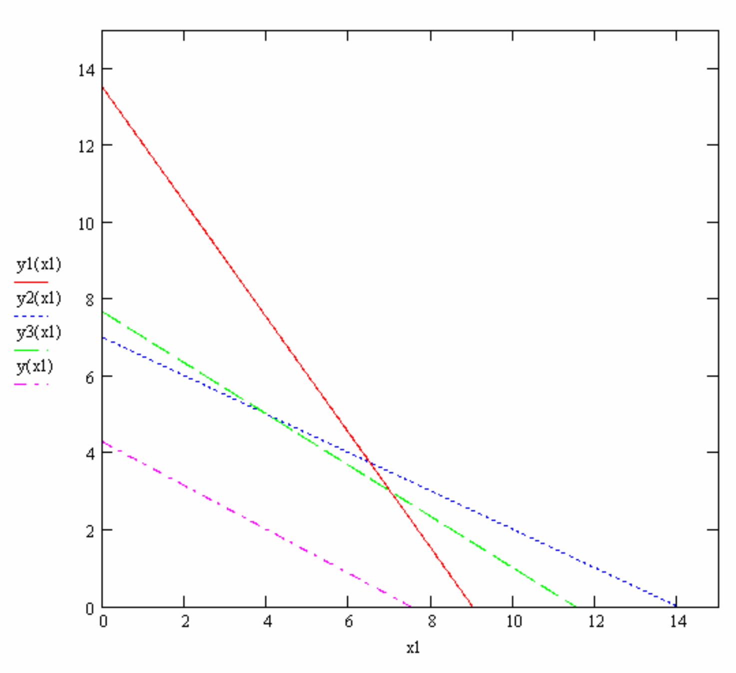
Побудуємо в одних осях графіки функцій, прийнявши const=60

```
-->const=60;
-->y1=(27-3*x1)/2;
-->y2=(28-2*x1)/4;
-->y3=(23-2*x1)/3;
-->y=(const-4*x1)/7;
-->plot2d(x1, y1 y2 y3 y)
```



Побудуємо в одних осях графіки функцій, прийнявши const=30

```
-->const=30;
-->y1=(27-3*x1)/2;
-->y2=(28-2*x1)/4;
-->y3=(23-2*x1)/3;
-->y=(const-4*x1)/7;
-->plot2d(x1, y1 y2 y3 y)
```



Спостерігаючи за зміною цільової функції, знаходимо точку максимуму.

Визначаємо прямі, перетин яких дає оптимальне рішення (обмеження по ВД і обмеження по склу).

За допомогою функції *fsolve* знайдемо рішення системи рівняннь

function [y]=fun(x)
*-->y2=(28-2*x1)/4;*
*-->y3=(23-2*x1)/3;*
endfunction
-->exec('C:\fun.sce'); disp('exec done'); exec done
-->fsolve([1 1],fun)
ans = 4 5
*y=4*x+7*y*
ans = 51

Отримаємо відповідь: $\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $z^* = 51$.

Економічний аналіз задач на базі графічного методу

<u>*Приклад 7*</u>. Фірма виготовляє два види морозива: вершкове та шоколадне. Для виготовлення морозива використовують два продукти: молоко та наповнювачі, витрати яких на 1кг морозива та добовий запас продуктів занесено в табл.2.

Таблиця 2 – Витрати та добовий запас продуктів

Продукти	**Витрати продуктів на 1кг морозива**		**Запас, кг**
	Вершкове	**Шоколадне**	
Молоко	0,8	0,5	400
Наповнювачі	0,4	0,8	365

Вивчення ринку збуту показує, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне не більш ніж на 100кг. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350кг на добу. Відпускна ціна 1кг вершкового морозива 16грош.од., шоколадного – 14грош.од.

Потрібно визначити, яку кількість морозива кожного виду повинна виготовити фірма, для того,щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним.

Розв'язання

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 & \text{(обмеження по молоку)} \quad (2.1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 & \text{(обмеження по наповнювачу)} \quad (2.2) \\ x_1 - x_2 \le 100 & \text{(обмеження по ринковому спросу)} \quad (2.3) \\ x_2 \le 350 & \text{(обмеження по ринковому спросу)} \quad (2.4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Таким чином завдання полягає в тому, щоб знайти додатні значення x_1, x_2, які задовольняють обмеження Ω, для яких функція z приймає найбільше значення.

Розв'яжемо завдання графічним методом.

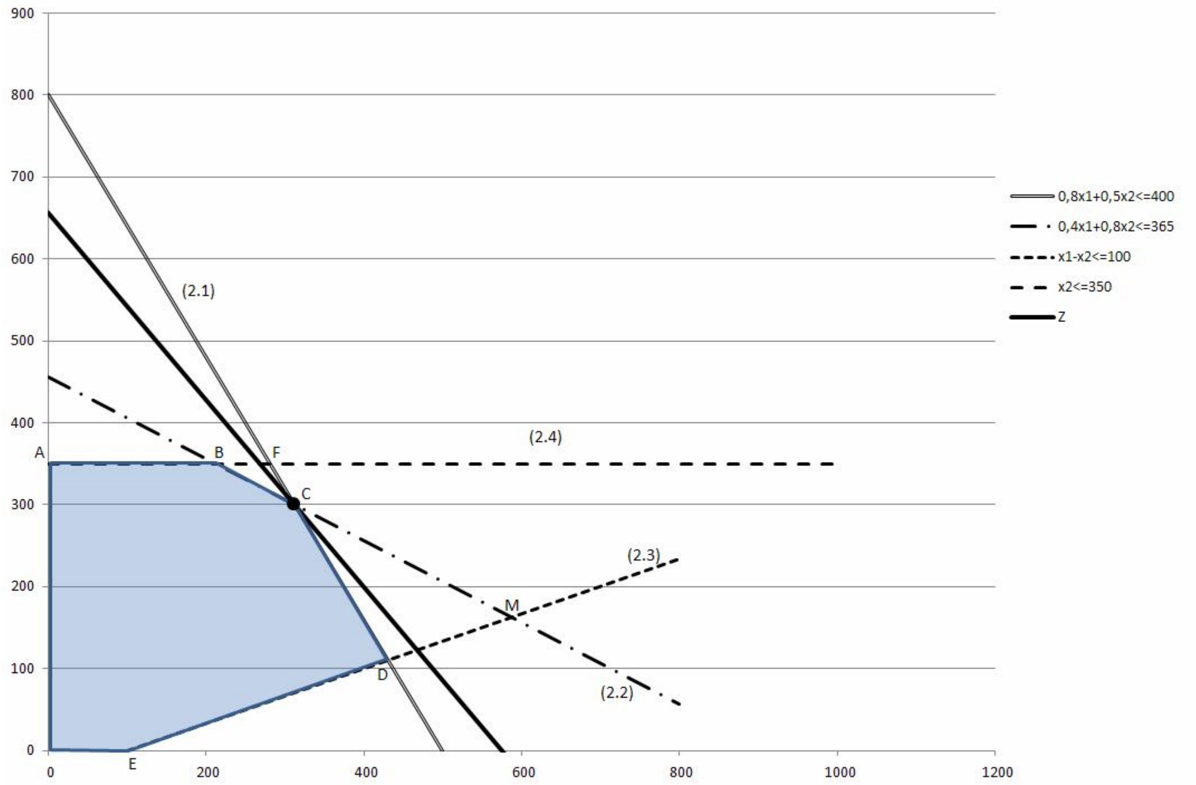


Рис. 4 – Рішення отримане графічним методом

Отримаємо відповідь: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 312{,}5 \\ 300 \end{bmatrix}$, $y^* = 9200$.

Згідно отриманого оптимального рішення фірмі необхідно випускати за добу 312,5кг вершкового та 300кг шоколадного морозива, при цьому максимально можливий прибуток складе 9200грош.од.

Проведемо економічний аналіз цієї задачі.

Визначимо, як впливає на оптимальне рішення збільшення або зменшення запасів необхідних продуктів. Для аналізу задачі приймемо, що нерівності системи обмеженнь можуть бути активними або пасивними. Якщо пряма проходить через точки, в яких знаходиться оптимальне рішення, то будемо вважати, що вона відноситься до активного обмеження. В протилежному случаї до пасивного обмеження.

Якщо обмеження активне, то воно вважається дефіцитним, тому що використовується повністю. Якщо обмеження пасивне, то ресурс недефіцитний і є у фірми в надлишку.

Розглянемо збільшення ресурсів по молоку, тобто збільшення правої частини обмеження (2.1). На рис.2.2 видно, що при переміщенні прямої паралельно сама собі до перетину з прямими (2.2) та (2.3) в точці M, обмеження (2.1) залишиться активним. Точку M визначимо як точку перетину прямих (2.2) та (2.3) за допомогою *пошуку рішення*.

Отримане рішення M(370,83; 270,3).

Підставим координати точки M в нерівність (2.1), отримаємо допустимий добовий запас молока:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 0{,}8 \cdot 370{,}83 + 0{,}5 \cdot 270{,}3 = 432{,}1\,\text{кг},$$

при цьому величина прибутку складе:

$$z(\overline{x}) = 16 \cdot 370{,}83 + 14 \cdot 270{,}3 = 9724{,}9\,\text{грош.од.}$$

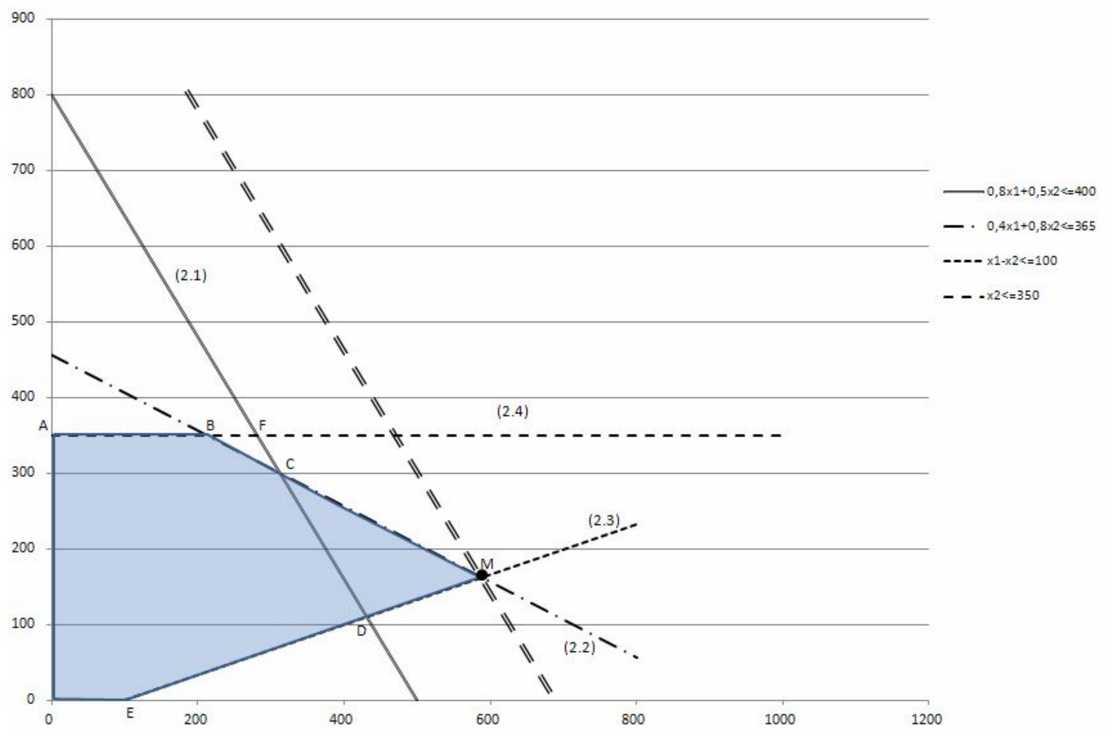


Рис. 5

Розглянемо підвищення обмеження по наповнювачам (рис. 6). При зміщенні прямої (2.2) паралельно самой собі вправо до перетину з прямими (2.1) та (2.4) в точці F обмеження по наповнювачам буде залишатися активним. Точку F визначимо. Як перетин прямих

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400 \\ x_2 = 350 \end{cases}$$

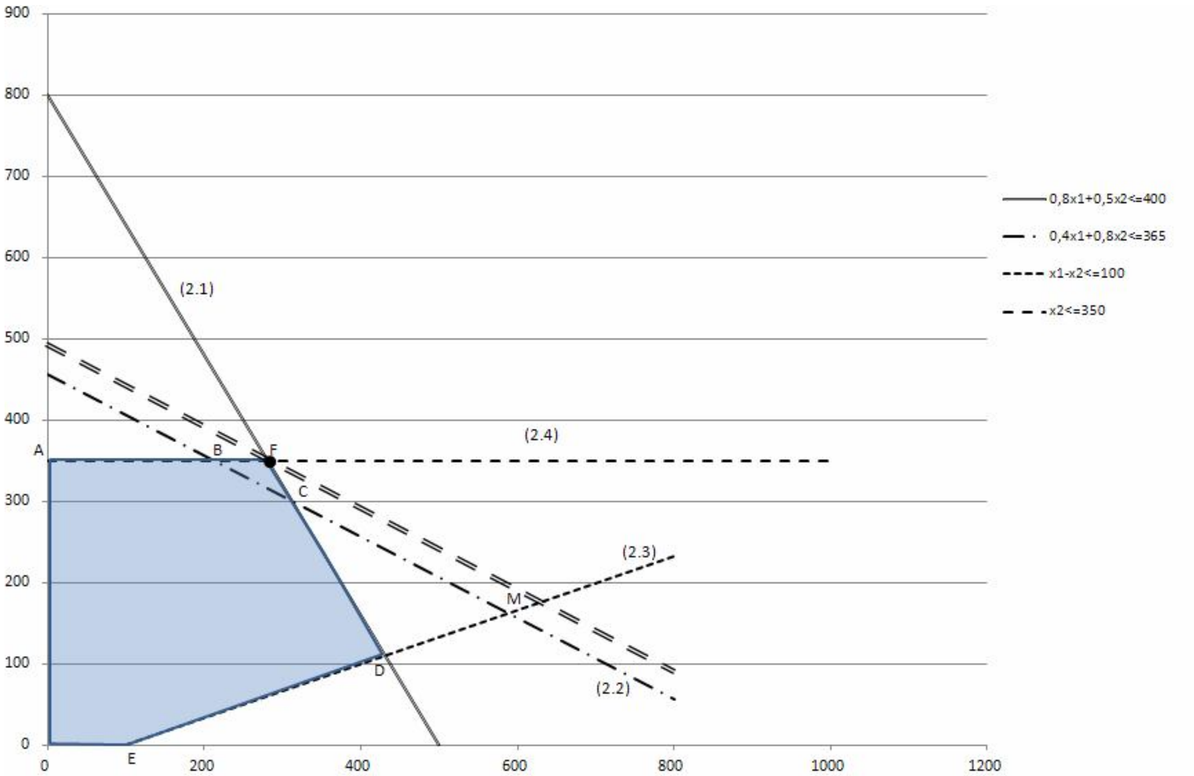


Рис. 6

Звідси координати точки F (281,25; 350).

Гранично допустимий добовий запас наповнювачів можна збільшувати до значення

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5\,\text{кг},$$

при цьому величина прибутку складе:

$$z(\overline{x}) = 16 \cdot 281{,}25 + 14 \cdot 350 = 9400\,\text{грош.од.}$$

Розглянемо можливість змін правої частини пасивних обмежень (2.3) і (2.4). Не змінюючи оптимального рішення (рис. 7), пряму (2.3) можна переміщати паралельно самій собі вгору до перетину з точкою C(312,5; 300), тобто праву частину обмеження (2.3) можна зменшувати до величини

312,5-300=12,5 кг

Пряму (2.3) можна переміщати паралельно самій собі вниз до перетину з віссю $0X_1$ в точці P(500; 0), тобто праву частину обмеження (2.3) можна збільшувати до величини 500 кг.

Таким чином, при незмінному оптимальному рішенні різниця в попиті між вершковим і шоколадним морозивом може змінюватися в діапазоні від 12,5 до 500 кг.

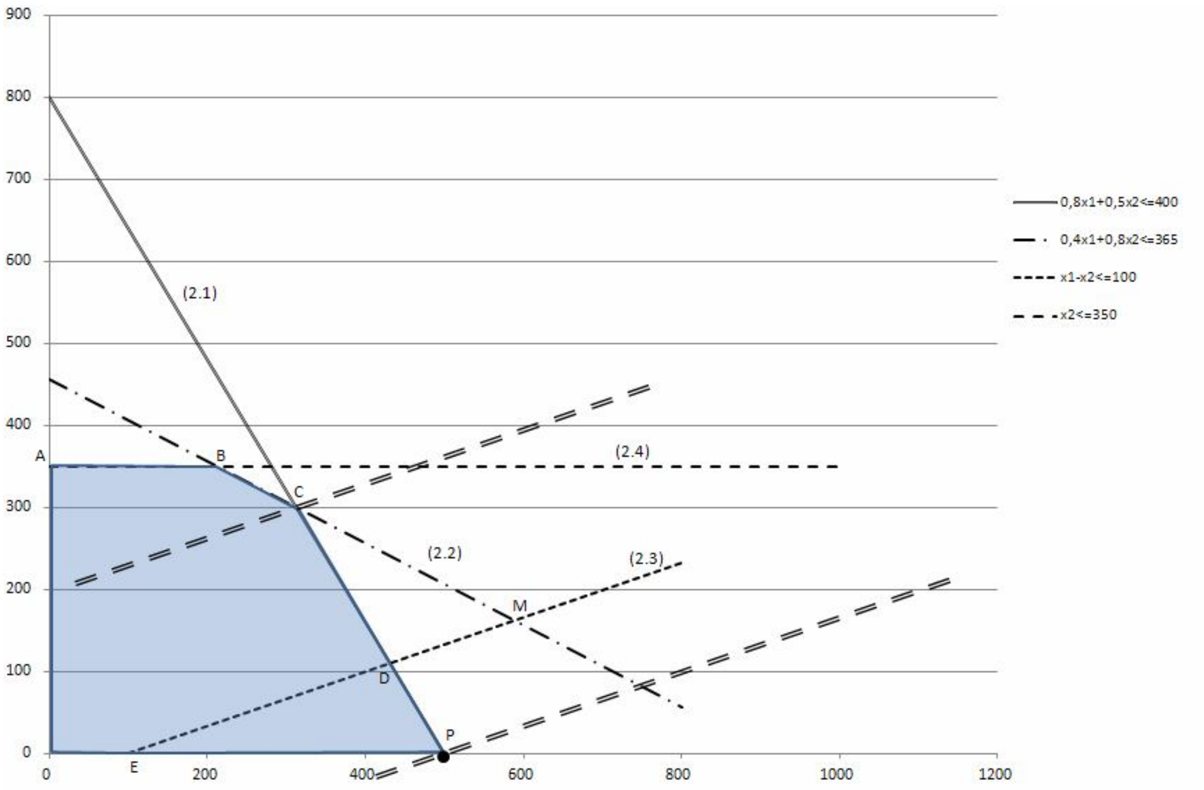


Рис.7

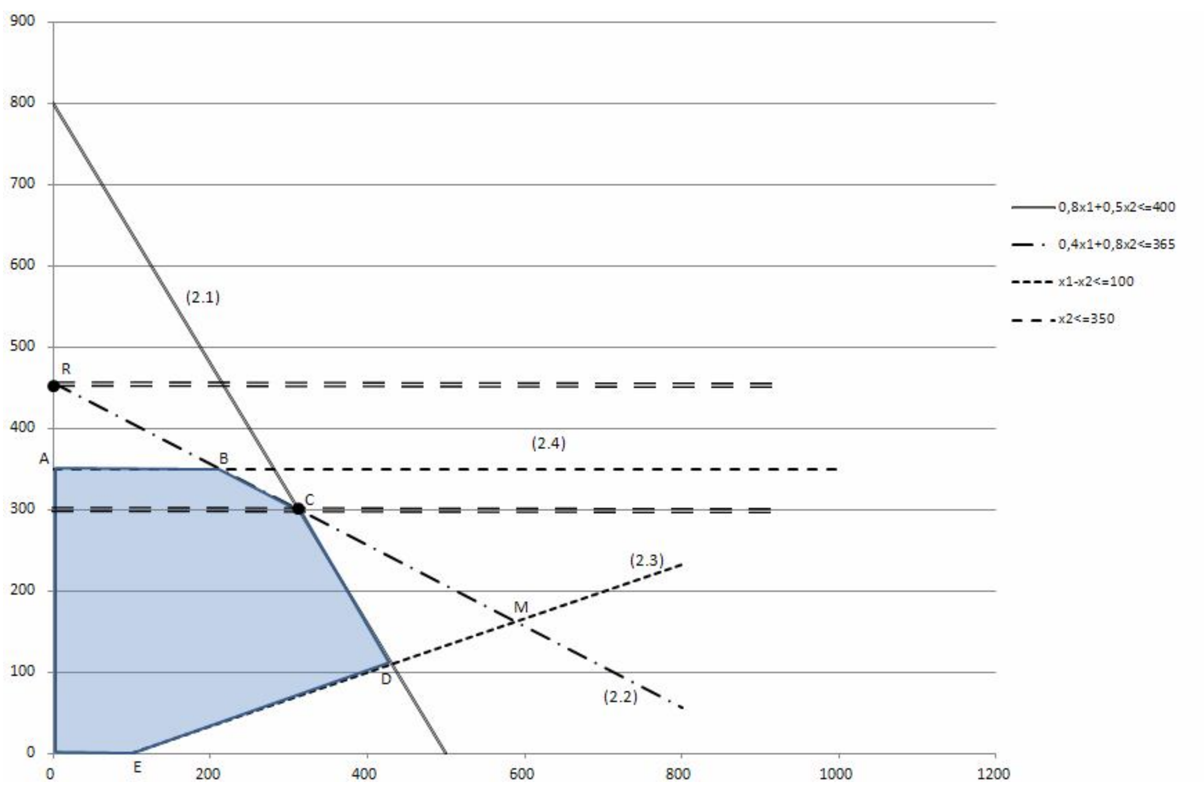


Рис.8

Аналогічно. Не змінюючи оптимального рішення (рис. 8), пряму (2.4) можна переміщати паралельно самій собі вгору до перетину з $0X_2$ в точці R (0; 456,25) або вниз до перетину з прямою (2.2) в точці C(312,5; 300).

Таким чином при незмінному оптимальному рішенні попит на шоколадне морозиво може змінюватися в діапазоні від 300 до 456,25 кг.

Лінійне програмування. Диференційний алгоритм
Розв'язання ЗЛП диференційним алгоритмом

Спочатку, слід привести ЗЛП до вигляду

$$y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x} \in \Omega} \tag{2.1}$$

$$\Omega : \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}) = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}, \tag{2.2}$$

Якщо вектор $\bar{x}$ розбити на дві складові $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{s} \end{bmatrix}$ $\bar{t}$ - вектор незалежних змінних, $\bar{s}$ - вектор залежних змінних, то задача (2.1) – (2.2) прийме вигляд

$$y(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n-m} k_j t_j + y_0 \to \min_{\bar{x} \in \Omega} \tag{2.3}$$

$$\Omega : \begin{cases} s_i = \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} t_j + \beta_i \\ s_i \geq 0, t_j \geq 0, \left(i = \overline{1,m}\right), \left(j = \overline{1,n-m}\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

<u>*Опорним*</u> називається таке рішення, у якого незалежні змінні дорівнюють нулю $\bar{t} = 0$, а залежні змінні дорівнюють вільним складовим $\bar{s} = \bar{\beta}$,

$$\overline{x_0^T} = \left(0 \quad \ldots \quad 0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \ldots \quad \beta_m\right).$$

Будь-яке опорне рішення можна представити у вигляді таблиці.

Серед опорних рішень виділяють допустимі опорні рішення (рішення, в якому відсутні негативні складові $\beta_i \geq 0$) і оптимальне опорне рішення, таке допустиме опорне рішення, при якому

$$k_j = \frac{\delta y}{\delta t_j} \geq 0, (j = \overline{1, n-m}). \tag{2.5}$$

	t_1	t_2	...	t_n	1
$S_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	β_1
$S_2=$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}	β_2
...	...	...	...	...	...
$S_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}	β_m
$y=$	k_1	k_2	$\cdots$	k_n	y_0

<u>*Алгоритм вирішення ЗЛП методом ДА:*</u>

1. <u>*Пошук опорного рішення*</u>. Розділивши вектор змінних на залежні і незалежні, і виразив залежні змінні через незалежні, ми отримуємо перше опорне рішення. Перевіряємо, чи є воно <u>допустимим</u>, якщо є, переходимо до <u>пункту 3</u>, якщо ні, - до пункту 2.
2. <u>*Пошук допустимого опорного рішення*</u>. Для отримання нового опорного рішення необхідно вибрати *r-ту* незалежну змінну, *к-ту* залежну змінну і поміняти їх місцями за допомогою виконання одного кроку жорданових виключень.

▪ Вибір *<u>направляючого стовпця</u>* (*r-та* незалежна змінна). У рядку з будь-яким негативним β_i знаходимо будь-який позитивний b_{ij} і *j-ий* стовпець позначаємо як <u>направляючий стовпець</u>. Якщо в рядку з негативним елементом β_i немає жодного позитивного елементу b_{ij}, то завдання не має жодного допустимого рішення;

▪ Вибір *<u>направляючого рядка</u>* (*к-та* залежна змінна) здійснюється по критерію $\Delta t_r = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i=1,2,...,m)\right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$ тільки серед рядків, для яких $\frac{\beta_i}{b_{ir}} < 0$;

▪ Виконання кроку жорданових виключень здійснюється за допомогою наступних чотирьох правил:

$$1)\, b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}};\ 2)\, b_{\substack{kj \\ j\neq r}} = -\frac{a_{kj}}{a_{kr}};\ 3)\, b_{\substack{ir \\ i\neq k}} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}};\ 4)\, b_{\substack{ij \\ i\neq k \\ j\neq r}} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{kj}}{a_{kr}};$$

Пункт 2 виконується до тих пір, поки ми не отримаємо допустиме опорне рішення. Отримане допустиме рішення ми перевіряємо на оптимальність по критерію (2.5), якщо критерій виконується, ми припиняємо пошук, якщо немає, переходимо до пункту 3.

3.*<u>Пошук оптимального рішення</u>*. Для отримання нового опорного рішення необхідно вибрати *r-ту* незалежну змінну, *к-ту* залежну змінну і поміняти їх місцями за допомогою виконання одного кроку жорданових виключень.

▪ Вибір *<u>направляючого стовпця</u>* (*r-та* незалежна змінна). Серед $k_j < 0$ вибираємо будь-який стовпець і позначаємо його як <u>направляючий стовпець</u>;

▪ Вибір *<u>направляючого рядка</u>* (*к-та* залежна змінна) здійснюється по критерію $\Delta t_r = \min\limits_{b_{ir}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i=1,2,...,m)\right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$ тільки серед рядків, для яких $b_{ir} < 0$.

Якщо стовпець таблиці диференціального алгоритму з негативною похідною $k_j = \frac{\delta y}{\delta t_r} < 0$ не містить жодного негативного елементу b_{ij}, завдання не має рішення.

▪ Виконання кроку жорданових виключень

Пункт 3 виконується до тих пір, поки ми не отримаємо оптимальне рішення або доведемо, що його немає.

Розглянемо диференціальний алгоритм на наступному прикладі.

<u>Приклад 8</u>. Підприємець керує невеликим механічним заводом. В наступному місяці він планує виготовляти два продукти (А і В), прибуток по яким оцінюється в 2500 та 3500 грош.од. відповідно. Виготовлення обох продуктів потребує витрат на машинну обробку, сирровину та праці. На виготовлення кожної одиниці продукта А відводиться 3 год. Машинної обробки, 16 одиниць сировини та 6 одиниць праці. Відповідні вимоги до одиниці продукту В складають 10, 4 та 6. Підприємець прогнозує, що наступного місяця він може надати 330 год. Машинної обробки, 400 одиниць сировини та 240 одиниць праці. Технологія виробничого процесу така, що кожного місяця потрібно виготовляти не менше 12 одиниць продукта В. Необхідно визначити кількість одиниць продуктів А і В, які

підприємець повинен виготовити наступного місяця для отримання максимального прибутку.

Розв'язання

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\overline{x}) = 2500x_1 + 3500x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 330 \\ 16x_1 + 4x_2 \le 400 \\ 6x_1 + 6x_2 \le 240 \\ x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Таким чином завдання полягає в тому, щоб знайти додатні значення x_1, x_2, які задовольняють обмеження Ω, для яких функція z приймає найбільше значення.

Розв'яжемо задачу за допомогою диференційного алгоритму.

Приводимо задачу до вигляду (2.1) -(2.2). Для цього помножимо цільову функцію на -1 і в обмеження введемо 4 змінні x_3, x_4, x_5, x_6, отримаємо:

$$y(\overline{x}) = -2500x_1 - 3500x_2 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 330 \\ 16x_1 + 4x_2 + x_4 = 400 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_5 = 240 \\ x_2 - x_6 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

1. <u>Пошук опорного рішення</u>. Хай залежними змінними будуть знов введені (x_3, x_4, x_5, x_6), а незалежними будуть x_1 і x_2, тоді виразимо залежні через незалежні $x_3 = -3x_1 - 10x_2 + 330$; $x_4 = -16x_1 - 4x_2 + 400$; $x_5 = -6x_1 - 6x_2 + 240$; $x_6 = x_2 - 12$.

Складемо таблицю і отримаємо перше опорне рішення $\overline{x}_0^T = [0 \quad 0 \quad 330 \quad 400 \quad 240 \quad -12]$. Воно неприпустиме тому, що $x_6 = -12 < 0$. Значення цільової функції - $y\left(\overline{x}_0^T\right) = 0$.

	x₁	*x₂*	*1*
x₃=	-3	-10	330
x₄=	-16	-4	400
x₅=	-6	-6	240
x₆=	0	1	-12
y=	-2500	-3500	0

2. <u>Пошук допустимого опорного рішення</u>. Направляючим стовпцем може бути тільки другий оскільки $b_{42} > 0$. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_1 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}} < 0} \left[-\frac{330}{-10} \quad -\frac{400}{-4} \quad -\frac{240}{-6} \quad -\frac{-12}{1} \right] = 12$.

Це означає, що як направляючий рядок беремо четвертий рядок і залежна змінна x_6 стане незалежною, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом стане $b_{42} = 1$. Виконавши один крок жорданових виключень, отримаємо нове опорне рішення $\overline{x}_1^T = [0 \quad 12 \quad 210 \quad 352 \quad 168 \quad 0]$. Дане рішення є допустимим. $y\left(\overline{x}_1^T\right) = -42000$, $y\left(\overline{x}_1^T\right) < y\left(\overline{x}_0^T\right)$.

	x_1	x_6	1
$x_3=$	-3	-10	330
$x_4=$	-16	-4	400
$x_5=$	-6	-6	240
$x_2=$	0	1	-12
$y=$	-2500	-3500	-42000

Тепер нас цікавить, чи є це рішення оптимальним? Ні, оскільки $k_1 = -2500 < 0$, $k_2 = -3500 < 0$.

Переходимо до третього етапу.

3. <u>Пошук оптимального рішення</u>. Направляючим стовпцем може бути перший або другий стовпець. Нехай направляючим стовпцем буде другий стовпець. Вибір направляючого рядка здійснюється тільки серед рядків, в яких $b_{ir} < 0$. $\Delta t_2 = \min\limits_{\beta_i<0}\left[-\frac{330}{-10} \quad -\frac{400}{-4} \quad -\frac{240}{-6}\right] = 21$. Це означає, що як направляючий рядок беремо перший рядок і незалежна змінна x_6 стане залежною, а залежна змінна x_3 стане незалежною.

Головним елементом стане $b_{12} = -10$. Виконавши один крок жорданових виключень, отримаємо нове допустиме опорне рішення $\overline{x}_3^T = [0 \quad 33 \quad 0 \quad 268 \quad 42 \quad 21]$. Данне рішення не є <u>оптимальним</u>, оскільки $k_1 = -1450 < 0$.

	x_1	x_3	1
$x_6=$	-0,3	-0,1	21
$x_4=$	-14,8	0,4	268
$x_5=$	-4,2	0,6	42
$x_2=$	-0,3	-0,1	33
$y=$	-1450	350	-115000

$$y\left(\overline{x}_3^T\right) = -115000,\ y\left(\overline{x}_3^T\right) < y\left(\overline{x}_2^T\right).$$

Повторюємо третій етап.

Після вибору направляючих стовпця та строки. Виконуємо крок жорданових перетворень і отримуємо нову таблицю і нове допустиме рішення.

$$\overline{x}_4^T = [10 \quad 30 \quad 0 \quad 120 \quad 0 \quad 21]$$

Данне рішення є <u>оптимальним</u>, оскільки $k_1 = 345{,}238 > 0$, $k_2 = 833.333 > 0$. $y\left(\overline{x}_4^T\right) = -130000$, $y\left(\overline{x}_4^T\right) < y\left(\overline{x}_3^T\right)$.

	x_5	x_3	1
$x_6=$	0,071	-0,142	18
$x_4=$	3,524	-1,714	120
$x_1=$	-0,238	0,143	10
$x_2=$	0,071	-0,143	30
$y=$	345,238	833,333	-130000

Отримаємо оптимальне рішення

$$\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix},\ y^* = 2500 \cdot 10 + 3500 \cdot 30 = 130000.$$

Розв'язання ЗЛП диференційним алгоритмом і за допомогою засобу «Пошук рішення» MS Excel

Розв'яжемо приклад 8.

Розв'язання

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = 2500x_1 + 3500x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 330 \\ 16x_1 + 4x_2 \le 400 \\ 6x_1 + 6x_2 \le 240 \\ x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Розв'яжемо задачу за допомогою диференційного алгоритму.

Необхідно привести задачу до канонічної форми. Задачу максимізації зведемо до задачі мінімізації.

$$y(\bar{x}) = -2500x_1 - 3500x_2 \to \min_{x \in \Omega}$$

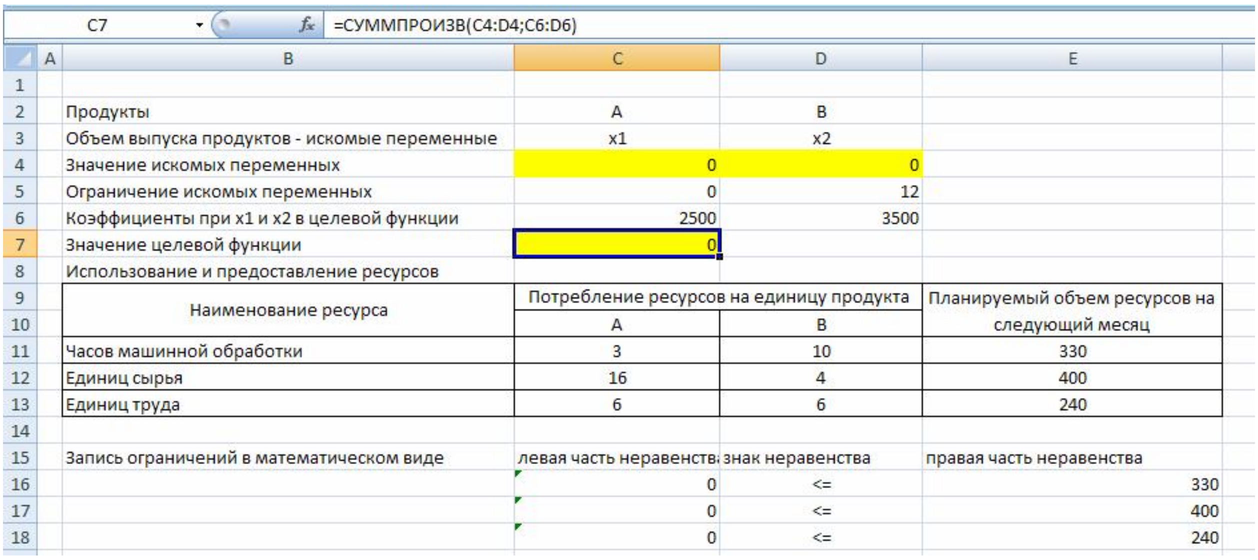
$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 330 \\ 16x_1 + 4x_2 + x_4 = 400 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_5 = 240 \\ x_2 - x_6 = 12 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Виразимо залежні змінні x_3, x_4, x_5 та x_6 через незалежні x_1 і x_2. Рішення представимо у вигляді таблички.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1 Поиск опорного решения								
2		x1	x2	1			0		
3	x3=	-3	-10	330	33		0		
4	x4=	-16	-4	400	100	Xоп=	330	не является	
5	x5=	-6	-6	240	40		400	допустимым	
6	x6=	0	**1**	-12	12		240		
7	z=	-2500	-3500	0			-12		
8									
9	2 Поиск опорного допустимого решения								
10									
11		x1	x6	1			0		
12	x3=	-3	**-10**	210	21		12		
13	x4=	-16	-4	352	88	Xоп,доп=	210	не является	
14	x5=	-6	-6	168	28		352	оптимальным	
15	x2=	0	1	12			168		
16	z=	-2500	-3500	-42000			0		
17									
18	3 Поиск оптимального решения								
19									
20		x1	x3	1			0		
21	x6=	-0,3	-0,1	21	70		33		
22	x4=	-14,8	0,4	268	18,10811	Xоп,доп=	0	не является	
23	x5=	**-4,2**	0,6	42	10		268	оптимальным	
24	x2=	-0,3	-0,1	33	110		42		
25	z=	-1450	350	-115500			21		
26									
27	3 Поиск оптимального решения								
28									
29		x5	x3	1			10		
30	x6=	0,071428571	-0,142857143	18			30		
31	x4=	3,523809524	-1,714285714	120		X*=	0	z=	130000
32	x1=	-0,238095238	0,142857143	10			120		
33	x2=	0,071428571	-0,142857143	30			0		
34	z=	345,2380952	833,3333333	-130000			18		
35									

Розв'яжемо задачу за допомогою засобу «Пошук рішення»

1. Створимо екранну форму

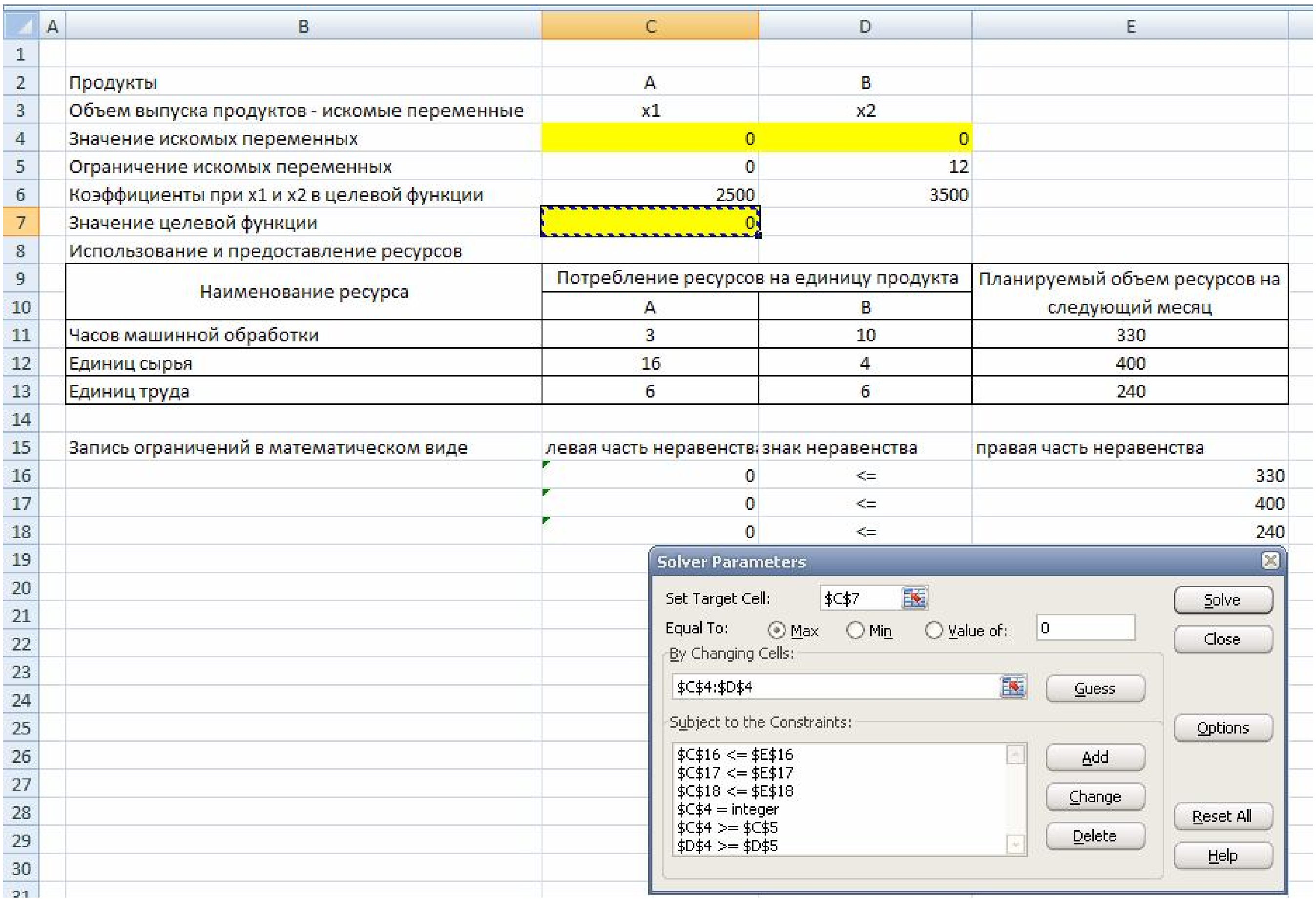


C7 =СУММПРОИЗВ(C4:D4;C6:D6)

	B	C	D	E
1				
2	Продукты	A	B	
3	Объем выпуска продуктов - искомые переменные	x1	x2	
4	Значение искомых переменных	0	0	
5	Ограничение искомых переменных	0	12	
6	Коэффициенты при x1 и x2 в целевой функции	2500	3500	
7	Значение целевой функции	0		
8	Использование и предоставление ресурсов			
9	Наименование ресурса	Потребление ресурсов на единицу продукта		Планируемый объем ресурсов на следующий месяц
10		A	B	
11	Часов машинной обработки	3	10	330
12	Единиц сырья	16	4	400
13	Единиц труда	6	6	240
14				
15	Запись ограничений в математическом виде	левая часть неравенства	знак неравенства	правая часть неравенства
16		0	<=	330
17		0	<=	400
18		0	<=	240

2. За допомогою функції СУММАПРОИЗВ(Массив1; Массив2;.) вичислимо «Значение целевой функции»(=СУММПРОИЗВ(C4: D4;C6: D6)) і «левая часть неравенства».

3. Встановити курсор в осередок E6, викликати «Пошук рішення» і заповнивши його наступним чином, натиснути « Виконати».



	B	C	D	E
1				
2	Продукты	A	B	
3	Объем выпуска продуктов - искомые переменные	x1	x2	
4	Значение искомых переменных	0	0	
5	Ограничение искомых переменных	0	12	
6	Коэффициенты при x1 и x2 в целевой функции	2500	3500	
7	Значение целевой функции	0		
8	Использование и предоставление ресурсов			
9	Наименование ресурса	Потребление ресурсов на единицу продукта		Планируемый объем ресурсов на следующий месяц
10		A	B	
11	Часов машинной обработки	3	10	330
12	Единиц сырья	16	4	400
13	Единиц труда	6	6	240
14				
15	Запись ограничений в математическом виде	левая часть неравенства	знак неравенства	правая часть неравенства
16		0	<=	330
17		0	<=	400
18		0	<=	240

	A	B	C	D	E
1					
2		Продукты	A	B	
3		Объем выпуска продуктов - искомые переменные	x1	x2	
4		Значение искомых переменных	10	30	
5		Ограничение искомых переменных	0	12	
6		Коэффициенты при x1 и x2 в целевой функции	2500	3500	
7		Значение целевой функции	130000		
8		Использование и предоставление ресурсов			
9		Наименование ресурса	Потребление ресурсов на единицу продукта		Планируемый объем ресурсов на следующий месяц
10			A	B	
11		Часов машинной обработки	3	10	330
12		Единиц сырья	16	4	400
13		Единиц труда	6	6	240
14					
15		Запись ограничений в математическом виде	левая часть неравенств	знак неравенства	правая часть неравенства
16			330	<=	330
17			280	<=	400
18			240	<=	240

4. Отримане рішення співпадає з рішеннями, отриманими іншими методами.

Розв'язання ЗЛП в Scilab

Для вирішення задач лінійного програмування в *Scilab* призначена функція *linpro* наступної структури

[x,kl,f]=linpro(c,A,b[,ci,cs] [,k] [,x0]

Тут c - масив (вектор-стовпець) коефіцієнтів при невідомих функції цілі, довжина вектора n збігається з кількістю невідомих x

A - матриця при невідомих з лівої частини системи обмежень, кількість рядків матриці дорівнює кількості обмежень m, а кількість стовпців збігається з кількістю невідомих n

b - масив (вектор-стовпець), містить вільні члени системи обмежень, довжина вектора m

ci - масив (вектор-стовпець) розмірності n містить нижню межу змінних ($ci_j \le x_j$); якщо така відсутня, указують [],

cs - масив (вектор-стовпець) довжиною n, містить верхню межу змінних ($cs_j \ge x_j$); якщо така відсутня, указують [],

до - цілочисельна змінна, використовується, якщо в систему обмежень окрім нерівностей входить і рівність, в матриці вони знаходитимуться в *до* перших рядках, що залишилися *l* рядків займуть нерівності, тобто $m = k + l$

x0 - вектор-стовпець початкових наближень довжиною n.

Функція *linpro* повертає масив невідомих x, мінімальне значення функції f і масив множників Лагранжа *kl* [].

Розглянемо використання функції *linpro* на прикладі рішення задачі лінійного програмування (приклад 7).

Математична модель задачі має вигляд:

$$y(\overline{x}) = 2500x_1 + 3500x_2 \rightarrow \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 330 \\ 16x_1 + 4x_2 \le 400 \\ 6x_1 + 6x_2 \le 240 \\ x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Зверніть увагу, що в четвертому обмеженні присутній знак ≥.

Для приведення системи обмежень до необхідного вигляду необхідно четверте обмеження помножити на -1. Рішення задачі представлене нижче.

```
c=[2500;3500];
A=[3 10;16 4;6 6;0 -1];
b=[330 400 240 -12];
ci=[0;0];
[x,kl,f]=linpro(c,A,b,ci,[])
```

Отримані значення

```
f= 130000
x= 10. 30
```

Транспортна задача
Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортна задача є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування. Її мета - розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.д.

У загальному вигляді транспортну задачу можна подати наступним чином:

у m пунктах виробництва $A_1, A_2,.., A_m$ роблять деякий однорідний продукт у кількостях, відповідно, $a_1, a_2....a_m$. Цей продукт споживають у n пунктах $B_1,..., B_n$ у кількостях, відповідно, $b_1, b_2.......b_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати з перевезення з пункту A_i у пункт B_j одиниці продукції рівні c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити всіх споживачів повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні.

У залежності від співвідношення між сумарним обсягом виробництва (запасами вантажу) і сумарним споживанням, транспортні задачі бувають *закриті й відкриті.*

Закрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортна задача називається закритою.

Відкрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва не дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то транспортна задача називається відкритою.

Розглянемо *закриту транспортну задачу.* Умови транспортної задачі зручно подати у вигляді :

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**					
		B_1	B_2	…	B_j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$), що позначають кількість вантажу, перевезеного з і-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega} \tag{3.1}$$

$$\Omega : \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (\mathrm{i\ =\ 1,\ 2,\ ...,m;}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (\mathrm{j\ =\ 1,\ 2,\ ...,n;}) \\ x_{ij} \geq 0; i = \overline{1,\mathrm{m}},\ j = \overline{1,\mathrm{n}}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Умови (3.2) гарантують повне вивезення продукту з усіх пунктів виробництва й повне задоволення попиту у всіх пунктах споживання.

Транспортна задача являє собою задачу лінійного програмування із ($m \times n$) числом змінних x_{ij}, і ($m + n$) числом обмежень-рівностей.

Змінні x_{ij} нумерують за допомогою двох індексів і тому записують у вигляді матриці: $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & . & x_{mn} \end{bmatrix}$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} — перевезеннями.

Матриця С = || c_{ij} || називається матрицею транспортних витрат. Оптимальним рішенням задачі є матриця

$$X_{opt} = (x_{ij})_{m\times n},$$

яка задовольняє системі обмежень і надає мінімум цільовій функції. Існують ручні й машинні методи рішення транспортної задачі. До ручних відносяться розподільний метод, метод потенціалів, до машинних – угорський метод, метод диференціальних стрічок.

Розв'язання транспортної задачі за допомогою ручних методів складається з наступних етапів:

- визначення початкового опорного рішення задачі;
- перевірка цього рішення на оптимальність;
- перехід від одного опорного рішення до другого.

Розглянемо рішення транспортної задачі на прикладі.

<u>*Приклад 9*</u> Три постачальники A_1, A_2, A_3 мають запаси продукції в кількостях 60, 50, 50 т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3, B_4 повинні отримати цю продукцію в кількостях 40, 40, 30, 50 т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{(грош.од.)}$$

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} – кількість продукції, яку щомісячно слід доставляти на *j–й* завод з *i–го* складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$L(X) = 3x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} + 4x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + $$
$$+ 3x_{33} + 4x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1- й крок. *1-й етап.* Найбільш поширеним методом побудови вихідного опорного плану є метод північно-західного кута. Він полягає в послідовному розподілі продукції споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з лівого верхнього квадрата (клітинки) й закінчуючи правим нижнім квадратом (клітинкою).

Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі. Згідно з цим методом заповнюємо таблицю, починаючи з лівого верхнього кута. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення 60 од. з потребою першого пункту призначення 40 од. Вибираємо меншу величину (40) і записуємо її в даний квадрат (табл.3.1). Перший постачальник, маючи 60 од. вантажу, відправляє першому споживачеві 40 од. вантажу. Оскільки першому споживачеві не потрібен більше груз, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець.

Таблиця 3.1

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	40	30	50
A_1	60	3 **40**	3	2	2
A_2	50	3	4	2	4
A_3	50	2	4	3	4

Тепер на першому пункті відправлення залишилося 60-40=20 од. продукції. Порівнюємо залишок 20 од. і потребу 40 од., які перший постачальник поставляє другому споживачеві. Вибираємо меншу величину (20) і записуємо її в сусідню клітинку (табл. 3.2). Оскільки весь запас в першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітинку, яка знаходиться нижче заповненої.

Таблиця 3.2

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	40	30	50
A_1	60	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	50	3	4	2	4
A_3	50	2	4	3	4

У новій клітинці другий постачальник залишає 20 од. вантажу для другого споживача і другий стовпець заповнений, оскільки другому споживачеві не потрібен більше вантаж (див табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	40	30	50
A_1	60	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	50	3	4 **20**	2	4
A_3	50	2	4	3	4

Тепер на другому пункті відправлення залишилося 50-20 = 30 од. продукції, які другий постачальник віддає третьому споживачеві. Другий рядок і третій стовпець з подальшого розгляду виключаємо, оскільки запаси другого постачальника вичерпані і потреби третього споживача задоволені.

Остання права нижня клітинка заповнюється механічно – в неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 50. Всі результати із знаходження початкового опорного плану наведені в табл. 3.4. Вони в таблиці виділені жирним шрифтом.

Таблиця 3.4

Пункти відправ-лення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	60	3 **40**	3 **20**	2	2 **0**
A_2	50	3	4 **20**	2 **30**	4
A_3	50	2	4	3	4 **50**

Таким чином, ми одержали перший початковий опорний план.

$$X_0=\begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо значення цільової функції $L(X)=3\cdot 40+3\cdot 20+4\cdot 20+2\cdot 30+4\cdot 50=520$.

Це значення буде використано на подальших кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинне послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Тепер необхідно перевірити умову *невиродженності* . План

$$X=(x_{ij})_{m\times n},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

є невиродженим, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше – то виродженим.

Число зайнятих кліток в таблиці дорівнює 5, $m+n-1=3+4-1=6$,тобто умова *невиродженності* не виконана. Зробимо його невиродженим, помістивши базисні нулі в клітку з координатами (i,j):(1,4).

2- й етап. Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність методом потенціалів за наступним критерієм: якщо опорне рішення транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система дійсних чисел $\alpha_i\ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j\ (j=\overline{1,n})$ задовольняючих умовам:

$$\beta_j+\alpha_i=c_{ij} \text{ при } x_{ij}>0 \text{ (для зайнятих кліток);}$$

$$\beta_j+\alpha_i\le c_{ij} \text{ при } x_{ij}=0 \text{ (для вільних кліток).}$$

Числа $\alpha_i\ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j\ (j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення. У зв'язку з цим знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення з системи:

$$\beta_1+\alpha_1=3,\ \beta_2+\alpha_2=4,\ \beta_4+\alpha_1=2,$$

$$\beta_2+\alpha_1=3,\ \beta_3+\alpha_2=2,\ \beta_4+\alpha_3=4,$$

що містить шість рівнянь з сім'ю невідомими. Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=3$, $\alpha_2=1$, $\beta_2=3$, $\alpha_3=2$, $\beta_3=1$, $\beta_4=2$. Записуємо знайдені потенціали в табл.3.5.

*3-й етап. Ви*значимо величину $\Delta_{ij}=\beta_j+\alpha_i-c_{ij}$, яку називають *оцінкою вільних кліток.* Якщо всі *оцінки вільних кліток* $\Delta_{ij}\le 0$, то опорне рішення є оптимальним. Якщо хоч би одна з оцінок $\Delta_{ij}>0$, то опорне рішення не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного рішення.

Таблиця 3.5

Пункти відправ-лення	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B$_1$	**B$_2$**	**B$_3$**	**B$_4$**	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A$_1$	60	– 3 **40**	3 **20**	2	+ 2 **0**	0
A$_2$	50	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A$_3$	50	+ 2	4	3	– 4 **50**	2
β_j		3	3	1	2	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{ij}=\beta_j+\alpha_i-c_{ij}$: $\Delta_{13}=-1$, $\Delta_{21}=1, \Delta_{24}=-1$ $\Delta_{31}=3$, $\Delta_{32}=1$, $\Delta_{33}=0$. Оскільки серед оцінок Δ_{ij} є позитивні, то опорний план X$_0$ не є оптимальним.

Серед позитивних оцінок вибираємо максимальний тариф :$\Delta_{31}=3$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл і перерозподіляємо потоки продукції, а саму клітку позначаємо знаком «+». Потім, рухаючись по зайнятих клітках, по черзі відзначаємо їх знаками «–» і «+». При цьому напрям руху може змінюватися тільки під прямим кутом і замикатися на початковій клітці. У результаті побудови циклу у відповідних рядках і стовпцях має бути парна кількість знаків «–», «+». У табл. 3.5 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном.

Потім з вершин зі знаком «–» обирають мінімальний вантаж, його додають до вантажів, що стоять у вершин зі знаком «+», і віднімають від вантажів у вершин із знаком «–». В результаті перерозподілу вантажу отримаємо нове опорне рішення (опорний план).

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{11}=40$ (мінімальний вантаж). Ця клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином $x_{14}=0+40=40$; $x_{31}=0+40=40$; $x_{34}=50-40=10$;

У результаті виконаних перетворень отримуємо новий опорний план

$$X_1=\begin{bmatrix}0 & 20 & 0 & 40\\ 0 & 20 & 30 & 0\\ 40 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix}.$$

При такому опорному плані цільова функція стає рівною 400, що менше початкового значення 520.

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.3.6) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вважаючи $\alpha_1 = 0$ вирішуємо її: $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 2$.

Таблиця 3.6

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	40	30	50	
A_1	60	3	3 **20**	2	2 **40**	0
A_2	50	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	50	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	3	1	2	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{11} = -3$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = -2$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 0$.

Оскільки серед оцінок $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$ є позитивна ($\Delta_{32} = 1$), то опорний план X_1 не є оптимальним.

Позитивна оцінка ($\Delta_{32} = 1$) відповідає клітці (3,2). Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл. 3.7 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+».

Таблиця 3.7

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	40	30	50	
A_1	60	3	– 3 **20**	2	+ 2 **40**	0
A_2	50	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	50	2 **40**	+ 4	3	4 **10** –	2
β_j		0	3	1	2	

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{34} = 10$. Дана клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином: $x_{12} = 20 - 10 = 10$, $x_{14} = 40 + 10 = 50$, $x_{34} = 0 + 10 = 10$

Новий опорний план $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція мети стає рівною 390, що менше попереднього значення 400.

3- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.3.8) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вирішуємо її.

$$\beta_2+\alpha_1=3,\ \beta_2+\alpha_2=4,\ \beta_1+\alpha_3=2,$$
$$\beta_4+\alpha_1=2,\ \beta_3+\alpha_2=2,\ \beta_2+\alpha_3=4,$$

Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=1$, $\beta_2=3$, $\alpha_2=1$, $\beta_3=1$, $\beta_4=2$, $\alpha_3=1$. Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij}=\beta_j+\alpha_i-c_{ij}$: $\Delta_{11}=-2$, $\Delta_{13}=-1$, $\Delta_{21}=-1$, $\Delta_{24}=-1$, $\Delta_{33}=-1$, $\Delta_{34}=-1$. Оскільки всі оцінки негативні, то опорний план X_2 є оптимальним.

Таблиця 3.8

Пункти відправ-лення	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	60	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	50	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	50	2 **40**	4 **10**	3	4	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план

$$X^*=\begin{bmatrix}0 & 10 & 0 & 50\\ 0 & 20 & 30 & 0\\ 40 & 10 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Цільова функція набуває оптимального значення L(x)=390.

Знаходження початкового опорного плану методом мінімальної вартості

Згідно з цим методом вантажі розподіляються насамперед в ті клітки, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень. Далі постачання розподіляються в незайняті клітки з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжується до тих пір, поки всі вантажі від постачальників не будуть вивезені, а споживачі не будуть задоволені.

Використовуючи умови *прикладу 9* визначити початковий опорний план методом мінімальної вартості й знайти оптимальне рішення задачі методом потенціалів.

Розв'язання

Всі результати по знаходженню початкового опорного плану *методом мінімальної вартості* наведені в табл. 3.9

Таблиця 3.9

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	60	3	3	2 **30**	2 **30**
A_2	50	3	4 **40**	2	4 **10**
A_3	50	2 **40**	4	3	4 **10**

Ми одержали перший початковий опорний план.

$$X_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 30 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо значення цільової функції:

$$L(X)=2\cdot 30+2\cdot 30+4\cdot 40+4\cdot 10+2\cdot 40+4\cdot 10=440.$$

У наступних таблицях наведено рішення задачі методом *потенціалів.*

Таблиця 3.10

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	60	3	3	– 2 **30**	+ 2 **30**	0
A_2	50	3	4 **40**	+ 2	4 **10** -	2
A_3	50	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	2	2	2	

Таблиця 3.11

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	60	3	3	- 2 **20**	+ 2 **40**	0
A_2	50	3	- 4 **40**	+ 2 **10**	4	0
A_3	50	2 **40**	+ 4	3	4 **10** -	2
β_j		0	4	2	2	

$$X_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.\ L(X)=420$$

Таблиця 3.12

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	60	3	+ 3	- 2 **10**	2 **50**	0
A_2	50	3	- 4 **30**	2 **20** +	4	0
A_3	50	2 **40**	4 **10**	3	4	0
β_j		2	4	2	2	

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.\ L(X)=400$$

Таблиця 3.13

Пункти відправ-лення	Запаси	Пункти призначення				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	60	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	50	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	50	2 **40**	4 **10**	3	4 **10**	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X)=390$

Рішення транспортної задачі за допомогою засобу «Пошук рішення» MS Excel

Використовуючи умови *прикладу 9* визначимо оптимальний план перевезення.

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} – кількість продукції, яку щомісячно слід доставляти на *j–й* завод з *i–го* складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$L(X)=3x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+2x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+4x_{24}+2x_{31}+4x_{32}+$$
$$+3x_{33}+4x_{34}\to\min_{x_{ij}\in\Omega},$$

$$
\Omega:\begin{cases}
x_{11}+x_{21}+x_{31}=40\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=40\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=30\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}=50\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50\\
x_{ij}\ge 0, i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}.
\end{cases}
$$

де x_{ij} кількість товару, що перевозиться з i- го складу в j- й магазин.

Розв'яжемо задачу за допомогою засобу «Пошук рішення»

1. Створити екранну форму

Таблицю «Тарифи на перевезення» заповнюємо значеннями з матриці С.

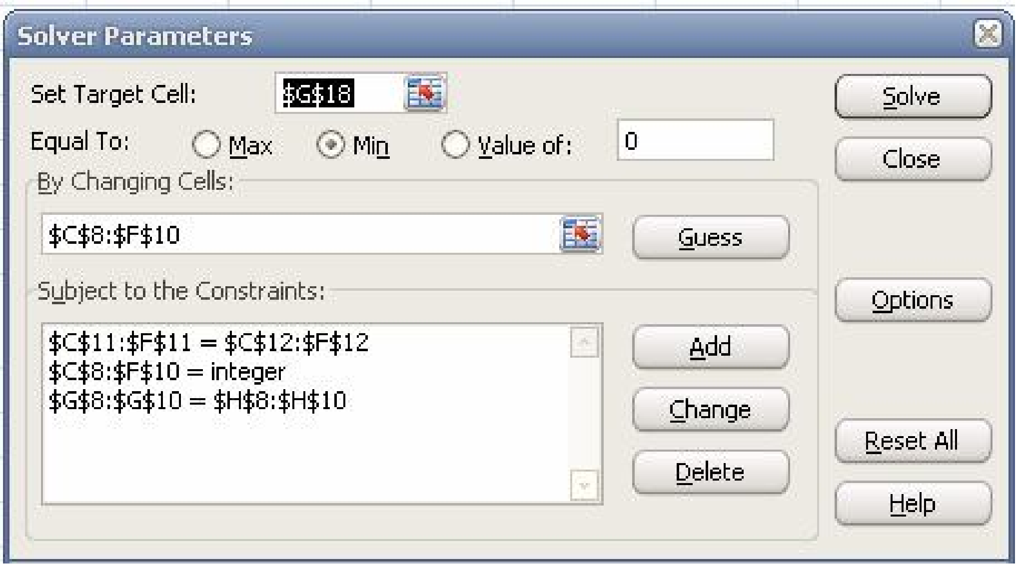
$$
C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}\text{(грош.од.)}
$$

G18 =СУММ(C18:F18)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Транспортная модель					
2		**Тарифи на перевозку**	B1	B2	B3	B4		
3		A1	3	3	2	2		
4		A2	3	4	2	4		
5		A3	2	4	3	4		
6								
7		**Об'єм перевозки**	B1	B2	B3	B4	Всього	Запаси
8		A1					0	220
9		A2					0	150
10		A3					0	90
11		Всього	0	0	0	0		460
12		Необхідно	100	110	120	130	460	
13								
14		**Витрати на перевозку**	B1	B2	B3	B4		
15		A1	0	0	0	0		
16		A2	0	0	0	0		
17		A3	0	0	0	0		
18		Всього	0	0	0	0	0	

Таблицю «Витрати на перевозку» розраховуємо перемноженням відповідних елементів таблиць «Тарифи на перевезення» та «Обєм перевезення».

Встановити курсор в осередок G18, викликати «Пошук рішення» і заповнивши його таким чином, натиснути « Виконати»



Порівняйте рішення, отримане вручну, з рішенням в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Транспортная модель					
2		Тарифи на перевозку	B1	B2	B3	B4		
3		A1	3	3	2	2		
4		A2	3	4	2	4		
5		A3	2	4	3	4		
6								
7		Об'єм перевозки	B1	B2	B3	B4	Всього	Запаси
8		A1	0	10	0	50	60	60
9		A2	0	20	30	0	50	50
10		A3	40	10	0	0	50	50
11		Всього	40	40	30	50		160
12		Необхідно	40	40	30	50	160	
13								
14		Витрати на перевозку	B1	B2	B3	B4		
15		A1	0	30	0	100		
16		A2	0	80	60	0		
17		A3	80	40	0	0		
18		Всього	80	150	60	100	390	
19								

Розв'язання транспортної задачі в Scilab

Використовуючи умови *прикладу 9* визначимо оптимальний план перевезення.

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} – кількість продукції, яку щомісячно слід доставляти на *j–й* завод з *i–го* складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$L(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 3x_{11} + 4x_{12} \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1+x_5+x_9=40\\ x_2+x_6+x_{10}=40\\ x_3+x_7+x_{11}=30\\ x_4+x_8+x_{12}=50\\ x_1+x_2+x_3+x_4=60\\ x_5+x_6+x_7+x_8=50\\ x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=50\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Рішення задачі наведено в лістингу. В масиві x будуть хранитися невідомі. В матриці A, всі строки відражають рівності системи обмежень, тому параметр k=7. Вектор ci – вектор нижніх обмежень невідомих, тобто відображає той факт, що вони не можуть бути відємними.

```
Z=[3;3;2;2;3;4;2;4;3;4];
A=[1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1;1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1];
b=[40;40;30;50;60;50;50];
ci=[0;0;0;0;0;0;0];
[x,kl,f]=linpro(Z,A,b,ci,[],k)
```

Отримані значення

```
f=  390
x=  0.  10.  0.  50. 0. 20. 30. 40. 10. 0. 0
```

Порівняйте рішення, отримане вручну, з рішенням в Scilab.

Індивідуальні завдання
Індивідуальні завдання з теми «Лінійне програмування: графічний метод»

Варіант 1

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 4x_1+3x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1+5x_2\le 10,\\ 4x_1+3x_2\le 12,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1+x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1+x_2\le 4,\\ 2x_1+x_2\le 6,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1+2x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1+2x_2\ge 5,\\ x_1+2x_2\ge 10,\\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1+4x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1+8x_2\le 40,\\ x_1+2x_2\ge 1,\\ 5x_2\le 18,\\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 6x_1 + 10x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 5x_1 - x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -x_1 - x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 11, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 4x_1 + 3x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = -x_1 + 4x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 4x_1 - 2x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 5x_1 + x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 4x_1 - x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \max;$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge -16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1 + x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 4x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 19, \\ 4x_1 + x_2 \le 22, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 3x_1 - x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 8, \\ -x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1 - x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Індивідуальні завдання з теми “Лінійне програмування: диференційний алгоритм”

Варіант 1

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 4 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\overline{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 8 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 8 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 8 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 10 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 + 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 12 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 6 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 13 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 14 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 15 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 16 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 17 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 18 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 19 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 20 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 21 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 16 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 22 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 15 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 23 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 15 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 24 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 16 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 25 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 26 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 + 6 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 3x_1 - x_2 + 8x_3 + 27 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 2_{x_1} + 2_{x_2} - 3_{x_3} + 2_8 \to \min_{x\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування: $y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 30 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Індивідуальні завдання з теми “Транспортна задача. Постановка, методи розв’язання та аналізу”

Постачальники A_1, A_2, A_3......A_m мають запаси продукції в кількостях $a_1, a_2 .... a_m$. т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3......B_n повинні отримати цю продукцію в кількостях $b_1, b_2 .... b_n$. т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані в таблиці:

Варіант № 1

a_i \ b_j	80	140	110
60	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6
40	6	4	9

Варіант № 2

a_i \ b_j	70	120	105	125	110
120	14	8	17	5	3
180	21	10	7	11	6
230	3	5	8	4	9

Варіант № 3

a_i \ b_j	80	60	30	90
70	3	7	5	2
45	5	3	4	7
90	2	1	8	5
55	5	7	2	8

Варіант № 4

a_i \ b_j	120	150	130
140	5	8	4
110	3	1	8
50	7	3	6
100	4	9	6

Варіант № 5

a_i \ b_j	150	130	120
125	6	3	4
115	4	7	2
130	8	5	9
120	3	7	2

Варіант № 6

a_i \ b_j	80	70	90	60	70
120	7	4	15	9	14
150	11	2	7	3	10
100	4	5	12	8	17

Варіант № 7

a_i \ b_j	112	105	108
107	7	5	4
103	4	9	5
35	8	6	2
80	3	5	1

Варіант № 8

a_i \ b_j	110	135	120
120	7	2	4
125	3	8	9
80	1	3	9
40	6	4	2

Варіант № 9

b_j / a_i	140	145	45
70	7	4	1
145	5	9	8
55	3	8	3
60	3	1	4

Варіант № 10

b_j / a_i	120	170	110
90	6	4	2
100	3	5	7
80	1	4	6
130	5	6	8

Варіант № 11

b_j / a_i	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
5	1	3	5
7	4	7	1

Варіант № 12

b_j / a_i	10	16	14
8	3	7	3
10	2	1	5
7	2	5	1
15	4	2	7

Варіант № 13

b_j / a_i	300	280	330	290	100
370	21	18	14	3	4
450	7	11	10	5	12
480	4	8	16	9	13

Варіант № 14

b_j / a_i	7	8	15	10
16	2	5	5	4
18	4	7	2	9
6	3	2	1	2

Варіант № 15

b_j / a_i	19	13	18
17	3	1	2
10	4	2	6
12	2	3	4
11	3	7	1

Варіант № 16

b_j / a_i	11	10	19
6	9	5	3
13	4	1	9
12	3	2	1
9	4	5	6

Варіант № 17

b_j / a_i	10	17	18
10	3	5	2
9	2	6	9
14	5	2	8
12	4	1	3

Варіант № 18

b_j / a_i	115	119	111
117	2	1	6
50	1	7	4
110	4	2	8
68	3	1	2

Варіант № 19

b_j / a_i	120	130	140
115	3	2	6
125	8	7	2
50	4	1	7
100	3	5	1

Варіант № 20

b_j / a_i	120	130	140
115	6	7	5
100	3	7	1
125	2	3	4
50	8	2	1

Варіант № 21

b_j / a_i	130	230	190	160	120
260	2	4	11	5	3
300	8	17	13	7	6
270	14	10	5	8	9

Варіант № 22

b_j / a_i	90	120	110	130	70
175	12	9	7	11	6
165	4	3	12	2	8
180	5	17	9	4	11

Варіант № 23

b_j / a_i	20	25	35	40
25	12	15	14	10
50	16	20	28	17
45	19	21	16	13

Варіант № 24

b_j / a_i	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

Варіант № 25

b_j / a_i	100	90	160	150	80
150	2	10	15	14	4
170	3	7	12	5	8
260	1	18	6	13	16

Варіант № 26

b_j / a_i	100	110	80	210
120	11	4	15	7
130	9	7	14	5
150	8	3	6	10

Варіант № 27

b_j / a_i	100	110	120	130
220	11	2	3	9
150	12	4	10	20
90	18	5	1	6

Варіант № 28

b_j / a_i	45	55	75	85
120	4	5	2	6
60	1	4	8	3
80	5	6	1	9

Варіант № 29

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Варіант № 30

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Список джерел

1. Сериков А.В. Компьютерное моделирование бизнес-процессов: –Х.: Бурун Книга, 2007. – 304с.

2. Коробов П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: учебник. – 3- е изд., – СПб.: Изд-во ДНК, 2006. – 376с.

3. Бережная Е.В. Математические методы моделирование экономических систем: – Финансы и статистика описание:; М., 2002. – 368с.

4. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. – Киев: Вища школа,1989. – 392с

5. Снетков Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов: Учебно-практическое пособие. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 228 с.

6. Замятина О. М. Компьютерное моделирование: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 121 с.

7. Жиронкина Г. В., Тіманюк В.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів.- Х.:Вид-во НФаУ:Золоті сторінки, 2004, –224с.

8. Елисеева И. И. Эконометрика: Учебник.- М.:Финансы и статистика, 2003.

9. Лук' яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник. – К.: Літера, ЛТД, 2002. – 352с.

10. Долгопятов Т.Г., Суворов Б.Г. Математическое моделирование экономических процессов МГУ, 1990, –262с.

11. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496с.:ил.

12. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. К. :Вища школа. - 1990. – 239с.

13. Плис А.И., Сливина Н.А. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 1999.

14. Егоршин А.А., Малярец Л.М. Практикум по эконометрии в Excel: Учебное пособие для экономических вузов. – Х.: «ИНЖЕК», 2005. – 100с.

15. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование. –М.: Высш.шк., 1980.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи
і виконання лабораторних робот
з дисципліни
«**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ**»
(для студентів 1 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки 6.030504 - "Економіка підприємства" та 6.030509 - "Облік і аудит")

Укладачі: **ШТЕЛЬМА** Ольга Миколаївна,
МАКОГОН Наталія Вікторівна

Відповідальний за випуск: *М. І. Самійленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *К. А. Алексанян*

План 2013, поз. 379М

Підп. до друку 28.10.2013 р.	Формат 60×84/16
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 2,8
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05. 2011 р.